L103

# Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Soient $G$ un groupe, noté multiplicativement, $H < G$ et $\mathbb{K}$ un corps (commutatif).

## I) Le groupe distingué et groupe quotient

### 1) Classes à gauche, classes à droite

**Déf 1** : Soit $g \in G$. L'ensemble $gH = \{gh, h \in H\}$ est appelé classe à gauche de $H$ dans $G$.
On note $G/H$ l'ensemble des classes à gauche. (De même, $H\backslash G$ l'ensemble des classes à dte)

**Prop 2** : On définit une relation d'équivalence sur $G$ en posant : $g \mathcal{R}_H g' \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H \Leftrightarrow gH = g'H$.

**Prop 3** : Les ensembles $gH$ ; $H$ et $Hg$ sont en bijection.

**Déf 4** : Si $\mathrm{Card}(G/H) < \infty$, on pose $[G:H] = \mathrm{Card}(G/H)$ l'indice de $H$ dans $G$.

**Th de Lagrange** : Soit $G$ un groupe fini, $H < G$ alors $[G:H] < \infty$ et $|G| = |H| . [G:H]$

### 2) Sous-groupe distingué

**Déf 6** : On dit que $H$ est distingué dans $G$, noté $H \triangleleft G$, si $\forall g \in G$, $gH = Hg$.

**Exple 7** : Dans un groupe commutatif, tous les sous-groupes sont distingués.

**Exple 8** : Les sous-groupes triviaux $\{1\}$ et $G$ sont toujours distingués dans $G$.

**Prop 9** : Si $H$ est d'indice 2 dans $G$, alors $H \triangleleft G$

**Exple 10** : Soit $n \geq 3$, $\langle r(\frac{2\pi}{n}) \rangle$ est distingué dans $D_n$ ; Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $O_n^+(\mathbb{R}) < O_n(\mathbb{R})$.

**Prop 11** : Soit $\varphi : G \to G'$ morphisme de groupe, alors $\mathrm{Ker}(\varphi) \triangleleft G$.

**Exple 12** : Soit $n \geq 2$, $\mathrm{Ker}(\varepsilon) = \mathfrak{A}_n \triangleleft \mathfrak{S}_n$ ; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(\det) = SL_n(\mathbb{K}) \triangleleft GL_n(\mathbb{K})$

### 3) Le groupe quotient

**Déf 13** : Soit $H \triangleleft G$. On munit l'ensemble $G/H$ d'une structure de groupe avec : $gH . g'H = gg'H$

**Exple 14** : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe. $\forall p \geq 1$, $\mathbb{L}^p := \mathcal{L}^p/_{\{f = 0 \text{ p.p.}\}}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $PGL_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K})/_{\mathbb{K}I_n}$

**Th 15** : Soit $H \triangleleft G$. L'application $\pi_H : \begin{array}{ccc} G & \to & G/H \\ g & \mapsto & gH \end{array}$ est un morphisme de groupes surjectif.

**1er théorème d'isomorphisme** : Soit $\varphi : G \to G'$ morphisme de groupes, alors $G/_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \simeq \mathrm{Im}\,\varphi$

**Exples 17** : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{U}_n$ ; $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{U}$ ; $\mathfrak{S}_n/_{\mathfrak{A}_n} \simeq \{-1;1\}$ ; $GL_n(\mathbb{K})/_{SL_n(\mathbb{K})} \simeq \mathbb{K}^*$.

**Appli 18** : Classification des groupes monogènes
Si $G$ est monogène de cardinal infini, alors $G \simeq \mathbb{Z}$.
Si $G$ est monogène de cardinal $d \in \mathbb{N}^*$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

**Th 19** : Si $H \triangleleft G$, il existe une bijection entre les sous groupes de $G/H$ et les sous groupes de $G$ contenant $H$.

**Appli 20** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $d | n$, il existe un unique sous groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de cardinal $d$.

**2ème et 3ème théorèmes d'isomorphisme** : Soient $H \triangleleft G$ et $K < G$,

- On a $K \cap H \triangleleft K$ et $K/_{(K \cap H)} \simeq KH/_H$
- Si de plus, $K \subset H \subset G$ et $K \triangleleft G$, on a $H/_K \triangleleft G/_K$ et $(G/_K)/_{(H/_K)} \simeq G/_H$

### 4) Sous-groupe caractéristique

**Prop 22 :** $H \lhd G \iff H$ est invariants par automorphismes intérieurs

ie $\forall g \in G,\ \forall h \in H,\ \alpha_g(h) = g h g^{-1} \in H$

**Déf 23 :** On dit que $H$ est un s/s groupe caractéristique de $G$, noté $H \sqsubset G$, s'il est invariant par tous les automorphismes de $G$.

**Déf 24 :** On appelle centre de $G$ le s/s groupe caractéristique $Z(G) = \{x \in G : \forall g \in G, xg = gx\}$

**Exple 25 :** Soit $n \geq 3$, $Z(\mathfrak{S}_n) = \{Id\}$, $Z(\mathbb{H}_8) = \{-1;1\}$, $Z(GL_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}.I_n$

**Exple 26 :** $G$ est commutatif $\iff Z(G) = G$.

**Appli 27 :** Théorème de Wedderburn : Toute algèbre à division finie est un corps.

② DVPT **Prop 28 :** Si $G$ est un $p$-groupe, alors $|Z(G)| \geq p$. De plus, si $|G| = p^2$, $Z(G) = G$.

**Déf 29 :** Soient $x, y \in G$, on note $[x,y] = x y x^{-1} y^{-1}$ le commutateur de $x$ et $y$.

**Déf 30 :** On appelle groupe dérivé de $G$ le s/s gpe caractéristique $D(G) = \langle \{[x,y], x \in G, y \in G\} \rangle$

**Prop 31 :** $D(G) \lhd G$ et le quotient $G/D(G)$ est abélien.

**Exple 32 :** Si $G$ est commutatif, $D(G) = \{1\}$ ; $D(\mathfrak{S}_3) = \langle \sigma \rangle$ ; $D(\mathbb{H}_8) = \{-1;1\}$,
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $D(GL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$ sauf si $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$.

## II Simplicité

### 1) Théorèmes de Sylow

Soit $G$ un groupe fini de cardinal $|G| = p^\alpha . m$ avec $p \nmid m$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $p$ premier.

**Déf 33 :** On appelle $p$-sous groupe de Sylow de $G$ un s/s gpe de cardinal $p^\alpha$.

**Exple 34 :** Soit $G = GL_n(\mathbb{F}_p)$ alors $\{A = (a_{ij}),\ \forall i, a_{i,i} = 1$ et $\forall i > j, a_{i,j} = 0\}$ est un $p$-Sylow de $G$.

**Lemme 35 :** Soit $H < G$, $S$ un $p$-Sylow de $G$, alors $\exists a \in G$ tel que : $aSa^{-1} \cap H$ soit un $p$-Sylow de $H$.

**Théorèmes de Sylow :**
1) $G$ contient au moins un $p$-Sylow
2) Tous les $p$-Sylow de $G$ sont conjugués
3) Soit $n_p$ le nombre de $p$-Sylow de $G$, alors $\begin{cases} n_p \equiv 1 \ [p] \\ n_p \mid m \end{cases}$

**Corollaire 37 :** Soit $S$ un $p$-Sylow de $G$. $S \lhd G \iff S$ est l'unique $p$-Sylow de $G$.

### 2) Groupe simple

**Déf 38 :** On dit que $G$ est simple si ses seuls groupes distingués sont $\{1\}$ et $G$.

**Exple 39 :** Soit $p$ premier, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple.

**Exple 40 :** Un groupe d'ordre 63 ne peut pas être simple.

① DVPT **Th 41 :** $\forall n \geq 5$, $\mathfrak{A}_n$ est simple

**Coro 42 :** · Si $n \geq 5$, $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ et $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$
· Si $n \neq 4$, les seuls sous groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont : $\{Id\}$ ; $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.
· A isomorphisme près, $\mathfrak{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60.

**Th 43 :** Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

## III) Produit de groupes

### 1) Produit interne de deux sous groupes

**Déf 44 :** Soient $H, K < G$. On note $HK = \{hk \,,\, h \in H, k \in K\}$.
On dit que $H$ et $K$ commutent si $HK = KH$.

**Prop 45 :** Soient $H, K < G$ alors $HK < G \iff HK = KG$

**Prop 46 :** Si $H \lhd G$, $K < G$ alors $HK < G$.

### 2) Produit direct

Soient $N$ et $H$ deux groupes.

**Déf 47 :** On munit l'ensemble $G = N \times H$ de la loi produit définie par :
$\forall (n,h), (n',h') \in N \times H$, $(n,h) \cdot (n',h') = (nn', hh')$
$G$ munit de cette loi est un groupe appelé produit direct de $N$ et $H$

**Prop 48 :** Soit $G = N \times H$ un produit direct de deux groupes.
- $\bar{N} = N \times \{1\}$ est un s/s groupe distingué de $G$, isomorphe à $N$.
- $\bar{H} = \{1\} \times H$ est un s/s groupe distingué de $G$, isomorphe à $H$.
- $G = \bar{N}\bar{H} = \bar{H}\bar{N}$ et $\bar{N} \cap \bar{H} = \{(1,1)\}$

**Th 49 :** Soient $G$ un groupe, $N, H < G$ tels que : $N \cap H = \{1\}$ ; $G = NH$ ; $NH = HN$
alors $G \simeq N \times H$. De plus, $N \lhd G$ et $H \lhd G$

② DVPT **Appli 50 :** Soit $G$ un groupe d'ordre $p^2$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$

**Appli 51 :** Th chinois : Soient $m, n$ deux entiers $1^{ers}$ entre eux, alors $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

### 3) Produit semi-direct

Soient $N$ et $H$ deux groupes et $\alpha : \begin{array}{l} H \to \mathrm{Aut}(N) \\ h \mapsto \alpha_h \end{array}$ un morphisme de groupes.

**Déf 52 :** On munit l'ensemble $G = N \times H$ de la loi définie par :
$\forall (n,h), (n',h') \in N \times H$, $(n,h) \cdot (n',h') = (n\,\alpha_h(n'), hh')$
$G$ munit de cette loi est un groupe appelé produit semi-direct de $N$ et $H$.

**Prop 53 :** On a : $\bar{N} \cap \bar{H} = \{(1,1)\}$ ; $\bar{N}\bar{H} = N \rtimes_\alpha H$ ; $\bar{N} \lhd N \rtimes_\alpha H$.

**Th 54 :** Soient $G$ un groupe, $N, H < G$ tels que : $N \cap H = \{1\}$ et $G = NH$
alors $G \simeq N \rtimes_\alpha H$ où $\alpha : \begin{array}{l} H \to \mathrm{Aut}(N) \\ h \mapsto [n \mapsto h n h^{-1}] \end{array}$ est la conjugaison

**Exple 55 :** Soit $n \geq 2$, $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathbb{D}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

**Appli 56 :** Soient $p < q$ deux nombres premiers et $G$ un groupe d'ordre $pq$
- Si $q \not\equiv 1 \,[p]$ alors $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$
- Si $q \equiv 1 \,[p]$ alors $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\alpha : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ non trivial.

**Exple 57 :** Si $|G| = 2p$ alors $G \simeq \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{D}_p$. En particulier $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathbb{D}_3$.

**Exple 58 :** À isomorphisme près, les grpes d'ordre 8 sont : $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ; $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ; $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ; $\mathbb{D}_4$ et $\mathbb{H}_8$.